

柯西中值定理的多种推广形式

杜先云¹ 任秋道²

1 成都信息工程大学数学学院, 四川 成都 610225

2 绵阳师范学院数理学院, 四川 绵阳 621000

摘要: 本文给出应用罗尔定理的一种构造法: 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 则存在 ξ , $a < \xi < b$, 使得 $f'(\xi) = g'(\xi)$ 。由此根据所证 $f'(\xi)$ 的表达式, 构造原函数 $g(x)$ 。经过曲线 $y = f(x)$ 上的二点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 可以作多种曲线 $g(x)$, 获得多种不同结论。同时从函数的个数与导数的阶数推广了柯西定理: 设一组在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x), F_i(x)$, 在 (a, b) 内可导数。若 $\sum_{i=1}^n \alpha_i [F_i(b) - F_i(a)] \neq 0$,

$\alpha_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$, 则存在 $a < \xi < b$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i [F_i(b) - F_i(a)]} \sum_{i=1}^n \alpha_i F'_i(\xi)$ 。若 $x_j \in [a, b], x_s \neq x_t$,

$j, s, t = 1, 2, \dots, n+1$, 则存在 $a < \xi < b$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = \frac{D_i}{D} F_i^{(n)}(\xi)$, 其中行列式 $D = |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)| \neq 0$,

$\alpha_i = (F_i(x_1), F_i(x_2), \dots, F_i(x_{n+1}))^T$, $\beta = (1, 1, \dots, 1)^T$, $D_i = |(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \beta)|$,

$\gamma_i = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+1}))^T = \tau$, $i = 1, 2, \dots, n$, $D_{n+1} = |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \tau)|$ 。

关键词: 导数; 连续; 驻点

DOI: 10.63887/tfet.2025.1.4.27

1 引入

在《数学分析》与《高等数学》中^{[1][2]}, 微分中值定理是微分学的基本、重要定理, 是较难、抽象的内容, 常常需要利用构造法获得结论。为了让学生更好学习、理解这部分内容, 本文利用罗尔定理获得一个构造法, 由此推导微分中值定理, 并且推广柯西中值定理^[3-5]。

定理 1 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 则存在 ξ , $a < \xi < b$, 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi) \quad (1)$$

证明 (构造法) 设 $G(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$ $G(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导数。

由题意可得

$$G(a) = f(a) - g(a) = 0,$$

$$G(b) = f(b) - g(b) = 0$$

由罗尔定理可得, 存在 ξ , $a < \xi < b$, 使得

$$G'(\xi) = 0 \text{ 即 } f'(\xi) = g'(\xi) \text{ 证毕。}$$

定理 1 表明: 两个可导函数 $f(x), g(x)$ 形成的曲线, 如果他们有二个不同的交点, 那么他们差构成的函数 $G(x) = f(x) - g(x)$, 存在水平的切线, 可能有极大(小)值, 二条曲线经过二点 $(\xi, f(\xi)), (\xi, g(\xi))$ 的切线平行。经过二点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 作与曲线

$y = f(x)$ 相交的直线:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

可以证明拉个朗日中值定理。

推论(柯西中值定理)设函数 $f(x), F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 对于 $x \in [a, b], F'(x) \neq 0$, 则

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad a < \xi < b$$

证明 由于 $x \in [a, b], F'(x) \neq 0$, 利用拉格朗日中值定理, 有

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a) \neq 0$$

经过二点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 作函数:

$$g(x)=pF(x)+q \quad \text{即}$$

$$f(a)=pF(a)+q, \quad f(b)=pF(b)+q$$

由此可得

$$p = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)},$$

$$q = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F(a)$$

因此

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F(x) +$$

$$f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F(a) \quad (2)$$

函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 满足定理 1 的条件, 存在 $\xi, a < \xi < b$, 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F'(\xi)$$

由此可得结论 证毕。

2 柯西定理的推广形式

定理 2 设一组在 $[a, b]$ 上的连续函数

$f(x), F_i(x), i=1, 2, \dots, n$, 在 (a, b) 内可导数, 若

$\prod_{i=1}^n F_i(b) - \prod_{i=1}^n F_i(a) \neq 0$, 则存在 $a < \xi < b$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{\prod_{i=1}^n F_i(b) - \prod_{i=1}^n F_i(a)} \sum_{i=1}^n F_i(\xi) \cdots F_{i-1}(\xi) i$$

(3)

证明 构造函数:

$g(x) = pF_1(x)F_2(x) \cdots F_n(x) + q$, 满足条件:

$$f(a) = pF_1(a)F_2(a) \cdots F_n(a) + q,$$

$$f(b) = pF_1(b)F_2(b) \cdots F_n(b) + q$$

由此可得

$$p = \frac{f(b)-f(a)}{\prod_{i=1}^n F_i(b) - \prod_{i=1}^n F_i(a)},$$

$$q = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\prod_{i=1}^n F_i(b) - \prod_{i=1}^n F_i(a)} \prod_{i=1}^n F_i(a)$$

将 p, q 代入所设表达式中。满足定理 1 的条件, 存在 $\xi, a < \xi < b$, 使得 (3) 式成立证毕。

推理 设一组在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x), F_i(x), i=1, 2, \dots, n$, 在 (a, b) 内可导数, 若 $F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a) \neq 0$, 则存在 $a < \xi < b$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a)} [F_1'(\xi)F_2(\xi) + F_1(\xi)F_2'(\xi)]$$

定理 3 设一组在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x), F_i(x), i=1, 2, \dots, n$, 在 (a, b) 内可导数, 若 $\sum_{i=1}^n \alpha_i [F_i(b) - F_i(a)] \neq 0, \alpha_i \in R, i=1, 2, \dots, n$, 则存在 $a < \xi < b$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i [F_i(b) - F_i(a)]} \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i'(\xi) \quad (4)$$

证明 构造函数: $g(x) = p \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(x) + q$, 满足

条件:

$$f(a) = p \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(a) + q,$$

$$f(b) = p \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(b) + q$$

由此可得

$$p = \frac{f(b) - f(a)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i [F_i(b) - F_i(a)]},$$

$$q = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i [F_i(b) - F_i(a)]} \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(a)$$

将 p, q 代入所设表达式中。满足定理 1 的条件，存在 ξ ， $a < \xi < b$ ，使得 (4) 式成立 证毕。

定理 4 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内 n 阶可导，且 $f(x_i) = g(x_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n+1$ ， $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ 则存在 ξ ， $a < \xi < b$ ，使得

$$f^{(n)}(\xi) = g^{(n)}(\xi) \quad (5)$$

证明 $f(x), g(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上连续，在 (x_i, x_{i+1}) 上可导，且

$$f(x_i) = g(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

因而 $f(x), g(x)$ 满足定理 1 的条件。存在 t_i ， $x_i < t_i < x_{i+1}$ ，使得

$$f'(t_i) = g'(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

令 $H_i(x) = f'(x) - g'(x)$ ， $x \in [t_i, t_{i+1}]$ 。在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上可导，利用 (6) 式，可得

$$H_i(t_i) = H_i(t_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

因而 $H_i(x)$ 满足定理 1 的条件。由此可得，存在 u_i ， $t_i < u_i < t_{i+1}$ ，使得

$$H'_i(u_i) = 0, \quad \text{即} \quad f''(u_i) = g''(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

像这样利用一次定理 1，函数的导数次数增加一次，利用 n 次定理 1 可得，存在 ξ ， $a < \xi < b$ ，使得 (5) 式成立 证毕。

定理 5 设一组在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x), F_i(x)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，在 (a, b) 内 n 阶可导。若 $x_j \in [a, b]$ ， $x_s \neq x_t$ ， $j, s, t = 1, 2, \dots, n+1$ ，则存在 $a < \xi < b$ ，使得

$$f^{(n)}(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D} F_i^{(n)}(\xi),$$

(7)

其中行列式 $D = |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)| \neq 0$ ， $\alpha_i = (F_i(x_1), F_i(x_2), \dots, F_i(x_{n+1}))^T$ ， $\beta = (1, 1, \dots, 1)^T$ ，

$$D_i = |(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \beta)|, \quad \gamma_i = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+1}))^T = \tau, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad D_{n+1} = |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \tau)|$$

证明 作函数： $g(x) = u_1 F_1(x) + u_2 F_2(x) + \dots + u_n F_n(x) + u_{n+1}$ 满足

$$f(x_i) = u_1 F_1(x_i) + u_2 F_2(x_i) + \dots + u_n F_n(x_i) + u_{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (8)$$

根据《线性代数》中的克兰姆法则，当系数行列式 $D \neq 0$ 时，线性方程组 (8) 有唯一解：

$$u_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

由此可导，

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{D} F_i(x) + \frac{D_{n+1}}{D}.$$

根据 (8) 式，函数 $f(x), g(x)$ 有 $n+1$ 个点的函数值相同，即 $f(x_i) = g(x_i)$ 利用定理 4，存在 ξ ， $a < \xi < b$ ，使得 (7) 式成立 证毕。

小结：定理 1 表明：有些导数问题可以根据所证 $f'(\xi)$ 的表达式，构造原函数 $g(x)$ ，经过曲线 $y = f(x)$ 上的二点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 可以作多种曲线 $g(x)$ ，获得多种不同结论。定理 2、3 推广了柯西定理中函数的个数，由两个函数推广到 $n+1$ 个函数；定理 5 推广了柯西定理中函数的个数，并且推广了导数的阶数，将一阶推广到 n 阶数。事实上 n 个函数可以产生多种线性组合和非线性组合，获得多种微分中值公式。

参考文献

- [1] 华东师范大学主编. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] 杜先云主编. 高等数学 (第一版) [M]. 成都: 西南财经大学出版社, 2024, 08.
- [3] 杜先云, 任秋道. 利用泰勒公式形式判断级数的敛散性[J]. 发展教育学 (DEVELOPMENT PEDAGOGY), 2024, 12(5): 303-307.
- [4] 杜先云, 任秋道. 函数极限的保号性及有序性的应用[J]. 向导学术研究, 2023, 1(1): 216-217.
- [5] 杜先云, 任秋道. 阿贝尔判别法的推广[J]. 数理化解题研究, 2022, (18): 29-31.

作者简介: 杜先云 (1964-), 男, 四川三台人, 教授, E-mail: duxy2011@foxmail.com。主要从事应用数学方面的研究。