

一种在粗网格下模拟储气库断层大变形的新单元

陈其 黄浪 吴亦强

武汉轻工大学土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430023

摘要: 针对储气库中断层非连续大变形模拟, 提出一种适用于断层不连续介质的新型有限元单元。推导二维六结点曲边断层单元的有限元模型, 通过 OPENSEES 平台二次开发实现单元算法, 并通过小变形与大变形工况对比验证其精度与适用性。小变形时, 断层单元与常规单元位移误差小于 0.1mm; 大变形时 (变形率达 87% 网格尺寸), 断层单元无需加密网格即可准确模拟, 而常规单元需加密网格。该断层单元在粗网格下具备高效模拟断层大变形的能力, 为储气库断层稳定性分析提供了新方法。

关键词: 断层单元; 二次开发; 粗网格; 大变形分析

岩层中的不连续面是一系列强度与周围岩体显著差异的界面, 不连续界面破坏了岩体的连续性, 对岩体的稳定性起决定作用。岩体的变形主要包含岩体块的变形以及不连续面的变形两部分, 不连续面的变形主要为界面的闭合变形和滑移变形^[1]。对于此类不连续介质, 只需建立不连续面的应力—应变本构关系, 并采用一些特殊类型的单元进行网格的划分, 就可以利用有限元法的基本思想和步骤进行模拟^[2]。基于此思想, 本文推导用于模拟储气库断层大变形的断层单元^[3]。

1 断层单元有限元模型推导

二维断层单元的上边界和下边界都是曲线, 推导单元的刚度矩阵时必须对坐标进行变换^[4]。采用二次三结点形函数如式(1), 则单元边界的坐标可由式(2)所求得。

$$N_1 = -\xi \frac{(1-\xi)}{2}, \quad N_2 = 1 - \xi^2, \quad N_3 = \xi \frac{(1+\xi)}{2} \quad (1)$$

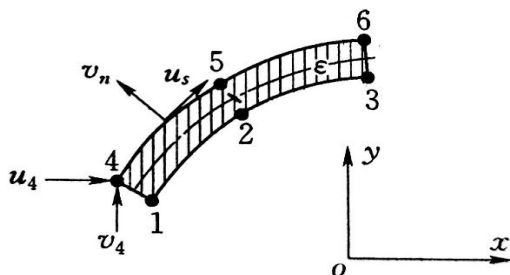


图 1 二维六结点曲边断层单元

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_i + N_2 x_i + N_2 x_i \\ y &= N_1 y_i + N_2 y_i + N_3 y_i \end{aligned} \quad (2)$$

式中: 下边界时 i 等于 1, 2, 3; 上边界时 i 等于 4, 5, 6。

断层中心线上的坐标为:

$$\begin{aligned} x &= N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2 + N_2 \bar{x}_3 \\ y &= N_1 \bar{y}_1 + N_2 \bar{y}_2 + N_3 \bar{y}_3 \\ \bar{x}_1 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_4), \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_5), \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{2}(x_3 + x_6) \end{aligned} \quad (3)$$

其中: 沿断层单元上、下边界的水平位移为:

$$\begin{aligned} u_{\text{上}} &= N_1 u_4 + N_2 u_5 + N_3 u_6 \\ u_{\text{下}} &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \end{aligned} \quad (4)$$

单元上、下边界的水平位移差为:

$$\Delta u = N_1 (u_4 - u_1) + N_2 (u_5 - u_2) + N_3 (u_6 - u_3) \quad (5)$$

同理, 单元的上、下边界的铅直位移差为:

$$\Delta v = N_1 (v_4 - v_1) + N_2 (v_5 - v_2) + N_3 (v_6 - v_3) \quad (6)$$

上下边界位移差的矩阵形式为:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e$$

其中形函数矩阵为:

$$[N] = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

沿单元上、下边界切向方向的位移差 Δu_s , 和法向方向的位移差 Δv_n , 可由 Δu 和 Δv 经坐标转换为求得:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_s \\ \Delta v_n \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = [L][N] \{\delta\}^e$$

其中: $[L] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

$$\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}$$

单元内任一点的应变可表示为:

$$[B] = \frac{1}{e} [L][N] \quad (10)$$

单元内任一点的应力可表示为:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \tau_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_s & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_s \\ \epsilon_n \end{Bmatrix} + \{\sigma_0\} = [D] \{\epsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (11)$$

式中: G_s 、 E_n 为断层单元在切线方向的剪切模量和法向方向的弹性模量。

$$[K]^e = \frac{t}{e} \int_{-1}^1 [N]^T [L]^T [D] [L] [N] S d\xi$$

根据应力分析普遍公式, 单元的刚度矩阵为:

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \quad (12)$$

2 断层单元的数值实现

单元的算法采用 C++ 面向对象的编程方法实

现, 单元算法的程序化结构基于开源计算平台 OPENSEES 中的单元编写规则, 编写 .h 头文件和 .cpp 源文件, 得到单元算法程序后将单元添加到 OPENSEES 单元库中^[5]。

二次开发新的单元时必须对 Element 基类中的四个基本成员函数进行修改。首先, 必须修改单元的构造函数, 单元的构造函数中包含了单元编号、单元的结点编号, 以及单元材料等参数。这些参数在单元的初始化过程中起着决定性作用, 为后续单元的各种计算和操作提供了基础数据。其次, 还必须定义成员函数 getTangentStiff(), 此为单元的刚度矩阵计算方式。通过该函数, 可以根据单元的材料参数、几何形状以及当前的应力状态等因素, 精确计算出单元的刚度矩阵, 这对于分析结构的力学行为至关重要^[6]。

最后, 修改 update() 成员函数以及 getResistingForce() 成员函数, 前者定义了单元内应变计算方式; 后者为定义单元结点力的计算方式, 结点力在整个结构的力学平衡分析中起着关键作用。在结构受到外部荷载作用时, update() 成员函数根据单元的变形情况以及材料的本构关系, 准确计算出单元内的应变分布, 为进一步评估结构的应力和变形提供了必要的数据支持。

3 算例检验

3.1 等效刚度推导

为检验断层单元准确性, 采用常规单元同断层单元, 在小变形和大变形下进行计算对比。由于断层力学参数常用刚度表示, 需要确定刚度与弹性模和剪切模量的关系^[7]。刚度的定义如式(13):

$$k_s = \frac{\partial \tau}{\partial u}, k_n = \frac{\partial \sigma}{\partial v} \quad (13)$$

式中: u 和 v 分别为沿断层切向和法向的位移差。

如图 2 所示, 弹性模量为 E 剪切模量为 G 的单元, 在切向产生位移 u 。单元厚度为 e ,

推导等效的剪切刚度。

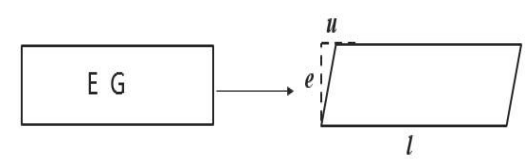


图 2 等效切向刚度推导示例

此时单元切向位移差为 u ，相应的剪应变和剪应力为：

$$\varepsilon_s = \frac{u}{e}, \tau = G\varepsilon_s$$

等效切向刚度为：

$$k_s = \frac{G\varepsilon_s}{u} = \frac{G}{e}$$

同理等效法向刚度为：

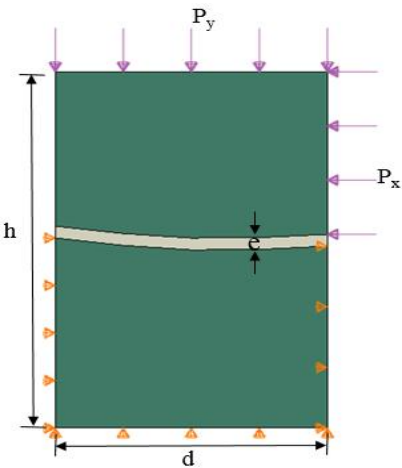
$$k_n = \frac{E}{e} \tag{15}$$

3.2 相较于网格尺寸的小变形分析

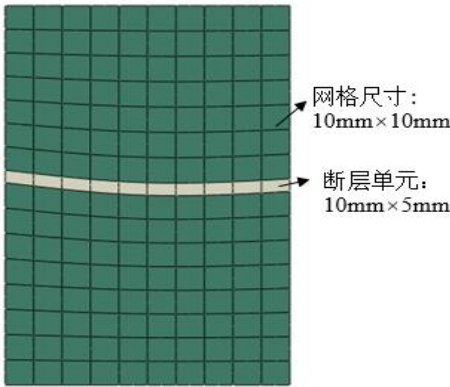
数值模型如图 3 所示，高 h 为 150mm 宽 d 为 100mm 的岩柱，中间部分为 5mm 厚的断层。岩石弹性模量 E_1 取 14GPa，泊松比 0.3。断层弹性模量 E_2 取 14MPa，泊松比 0.3。断层处划分 10 个单元，分别采用二维六结点断层单元和常规四边形单元，依据式(14)和(15)计算等效切向刚度和法向刚度。下部岩石约束左右两侧以及底部法向位移，上部岩石在顶部和右侧分别施加 P_y 和 P_x 的表面压力。

表 1 荷载取值

组别	P_x (MPa)	P_y (MPa)
工况一	3	0.3
工况二	10	0.3



(a) 几何模型



(b) 网格划分

图 3 二维数值算例

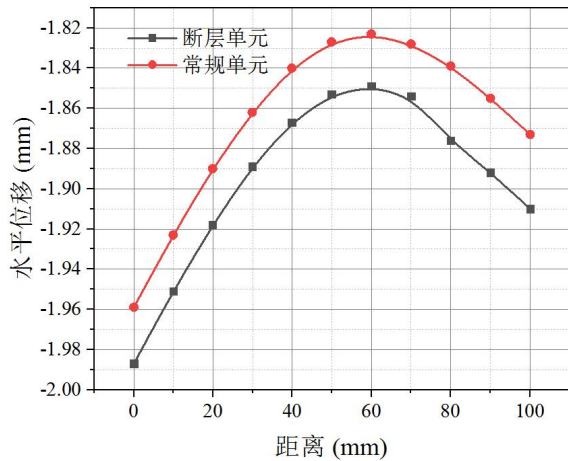


图 4 断层上部从左至右各点水平位移

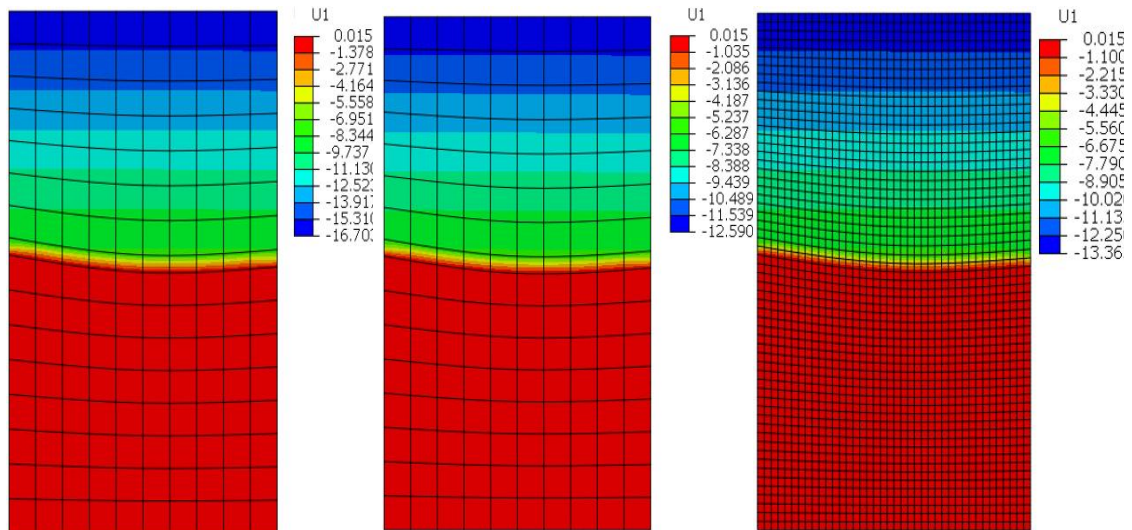
沿断层顶部从左至右上表面各结点水平位移,如图4。由于断层具有一定弧度,水平位移呈现两边大中间小的曲线分布,两种单元的水平位移均随距离先增大后减小,在距离约60mm处达到位移最大值。采用断层单元和常规四边形单元计算时,两者对应结点绝对误差最大为0.1mm,绝对误差从右向左逐渐减小,验证了采用断层单元计算的正确性。在相同距离位置,常规单元计算出的水平位移整体略小于断层单元。如在距离为0mm处,常规单元水平位移约为-1.96mm,断层单元约为-1.98mm;在距离60mm的位移最大值处,常规单元约为-1.82mm,断层单元约为-1.86mm。从颜色

对应的位移数值来看,两者在黄色区域的位移量级大致相同,但具体数值存在差异。断层单元计算的位移值在某些局部可能偏大或偏小,不同颜色分布范围和数值对应情况与四边形单元有所不同。

在工况一荷载作用下,断层上部结点产生水平位移。下部结点由于两侧有约束,水平位移基本为0mm。此时断层处网格对应水平向尺寸为10mm,每个单元上水平位移差相对于网格尺寸的变形率,采用断层单元时最大为1.98/10,采用常规单元时最大为1.96/10。

3.3 相较于网格尺寸的大变形分析

由工况一可见单元变形相对网格尺寸较小时,采用断层单元和常规有限元的计算精度接近。为进一步对比在相对网格的变形率增大时,两者的计算结果,采用工况二将水平荷载 P_x 增加到10MPa。计算完成后两者的水平位移如图5所示,采用断层单元计算时模型顶部最大位移达到了16.7mm,大于使用常规单元时的顶部位移12.6mm。



(a) 采用断层单元

(b) 采用四边形单元

(c) 四边形单元加密网格

图 5 工况二荷载作用下水平位移 (mm)

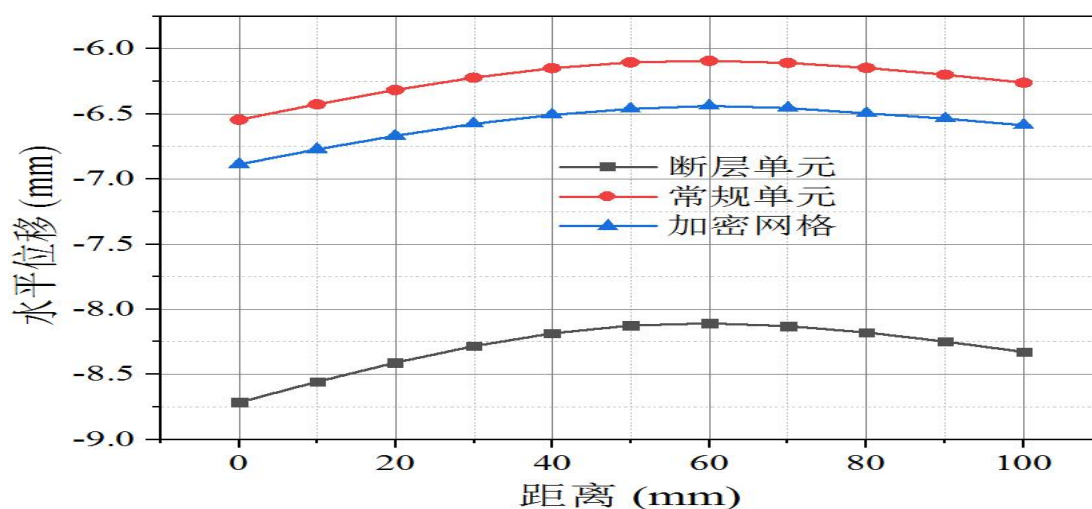


图 6 断层上部从左至右各点水平位移

从左至右提取断层上部各结点的水平位移，如图 6 所示。该工况下采用常规单元，断层最大水平位移 6.5mm，对应单元相对网格的变形率为 6.5/10。采用断层单元时，最大位移为 8.7mm，相对于网格尺寸变形率 8.7/10。最小位移处于断层中部，采用常规单元时为 6mm，单元相对网格的变形率为 6.0/10。采用断层单元时为 8.1mm，单元相对网格的变形率为 8.1/10。在相同工况下，同样的网格尺寸，单元相对于原始网格尺寸发生大变形时，采用断层单元计算时的变形量大于常规有限元。

相同工况时，采用常规单元计算后，变形量到达网格尺寸的 65%时，断层单元计算后变形量达到网格尺寸的 87%。对于常规有限元，只有增大网格密度时，结点的相对位移才有所增加。在实际工程中，断层的尺寸更大，采用加密网格的方法会极大增加计算时间。采用断层单元时，划分较为稀疏的网格，就可计算出断层各处的大变形位

移。

4 结论

(1) 推导了在粗网格条件下用于模拟储气库断层大变形的断层单元。

(2) 在开源计算平台 OPENSEES 中二次开发实现了断层单元的算法。二次开发新单元时，需要基于 OPENSEES 单元类中的基类 (Element.h) 进行继承和派生。

(3) 采用数值算例，验证了断层单元的精度和大变形特性。相同工况下，荷载较小，单元产生相较于网格尺寸的小变形时，断层单元与常规有限元计算结果接近。荷载较大，单元产生大变形时，常规有限元变形量到达网格尺寸的 65%，断层单元计算后变形量达到网格尺寸的 87%。相同网格下，断层单元无需加密即可模拟大变形，而常规单元需加密网格，显著提升计算效率。

参考文献

- [1]梁正召, 唐春安, 张永彬, 等. 岩石二维破裂过程的数值模拟研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(5): 91-93.
- [2]刘清朴. 岩石节理非线性模型及其工程应用[D]. 武汉: 武汉大学, 2017.
- [3]Christisan E, Robert S, Peter E. A discrete element model to describe failure of strong rock in uniaxial compression[J]. Granular Matter, 2011, 13(4): 341-364.

- [4]Wong L N Y, Zhang X P. Size effects on cracking behavior of flaw-containing specimens under compressive loading[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2014, 47(5): 1921-1930.
- [5]张秀丽. 断续节理岩体破坏过程的数值分析方法研究[D]. 武汉: 中国科学院研究生院(武汉岩土力学研究所), 2007.
- [6]Gong Bin, Tang Chun'an, Wang Shanyong, et al. Simulation of the nonlinear mechanical behaviors of jointed rock masses based on the improved discontinuous deformation and displacement method[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2019, 122: 1365-1374.
- [7]朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 第四版, 北京: 中国水利水电出版社, 2018: 48-66